Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Übung 2

Montag, 25. April 2016

Aufgabe 1. Die folgenden Beziehungen gelten für die Entropie von diskreten Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass sie für die differentielle Entropie nicht gelten, indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben.

a) $\mathrm{H}(X) \geq 0$,

b) $\mathrm{H}(T(X)) \leq \mathrm{H}(X)$,

c) $\mathrm{H}(X+Y) \leq \mathrm{H}(X,Y)$,

d) $\mathrm{H}(X+Y) \leq \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y)$.

Hinweise:
Zu a) und b): Für $X \sim \mathrm{R}(0,1)$ und $a > 0$ gilt $aX \sim \mathrm{R}(0,a)$.
Zu c) und d): Für X, Y s.u. gilt $\mathrm{H}(X,Y) = \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y)$. Wählen Sie für ein Gegenbeispiel X und Y so, dass $\mathrm{H}(X+Y)$ einfach zu bestimmen ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie $\mathrm{I}(X;Y)$, $\mathrm{H}(X|Y)$, und $\mathrm{H}(Y|X)$ für

$$(X,Y)' \sim \mathrm{N}_2\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

mit $-1 < \rho < 1$.

Aufgabe 3.

a) Es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA}).$$

b) Es sei $\boldsymbol{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Zufallsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})) = \mathrm{tr}(\mathrm{E}(\boldsymbol{X})).$$