Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Übung 6

Montag, 30. Mai 2016

Aufgabe 1. Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ eine positiv definite hermitesche Matrix. Zeigen Sie die Gültigkeit der Hadamard-Ungleichung

$$|\boldsymbol{A}| \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Hinweis: Definieren Sie einen Zufallsvektor $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{A})$ und verwenden Sie die Eigenschaft $\mathrm{H}(Y|Z) \leq \mathrm{H}(Y)$ der differentiellen Entropie sowie die Kettenregel

$$\mathrm{H}(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(Y_i|Y_1, \ldots, Y_{i-1})\,.$$

Aufgabe 2. Es seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei positiv definite hermitesche $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass die Implikation

$$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| \geq |\boldsymbol{B}|$$

gilt.

Hinweis: Der Ausdruck $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$ ist eine Kurzschreibweise dafür, dass die Matrix $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ positiv definit ist, d.h.

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\,.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3. Gegeben sei der parallele Gaußkanal

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}, \quad \boldsymbol{W} \sim \mathrm{N}_2\left(\boldsymbol{0}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right), \quad \mathrm{E}[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}] \leq 2.$$

Die Kapazität dieses Kanals lässt sich bestimmen zu $C = \log(3)/2$. Der Eingang $\boldsymbol{X}$ habe im Folgenden die kapazitätserreichende Eingabeverteilung

$$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_2\left(\boldsymbol{0}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Sie sollen nun einen äquivalenten einfachen Gaußkanal herleiten. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeigen Sie: Es gibt ein $X \sim \mathrm{N}(0,1)$, so dass $\boldsymbol{X} \sim (1,-1)'X$.

b) Zeigen Sie: Für $Y = (1,-1)\boldsymbol{Y}$ und X aus (a) gilt $\mathrm{I}(X;Y) = \log(3)/2$.

c) Vervollständigen Sie nun das Diagramm: