Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Zusatzübung

Freitag, 12. August 2016

Aufgabe 1. Die Aufgabe besteht aus zwei Teilen, die unabhängig voneinander lösbar sind.

Teil I

Gegeben seien zwei diskrete Zufallsvariablen $X \in \{-1, 0, 1\}$ und $Y \in \{0, 1\}$, wobei Y gleichverteilt ist und die *bedingte* Verteilung von X unter Y in der folgenden Tabelle angegeben ist:

$P(X = i \mid Y = j)$	$i = -1$	$i = 0$	$i = 1$
$j = 0$	0.4	0.2	0.4
$j = 1$	0.2	0.6	0.2

a) Geben Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie die Randverteilung von X an.

b) Geben Sie die bedingte Verteilung von Y unter $X = 1$ an.

c) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $(X, Y)^T$.

d) Sind X und Y unkorreliert?

e) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Teil II

Dieser Aufgabenteil beschäftigt sich ganz allgemein mit Kovarianzmatrizen beliebiger Zufallsvektoren.

f) Welche der folgenden Matrizen können Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors sein? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihre Antwort an.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Gegeben sei die Dichte $f_X(x)$ einer reellen Zufallsvariable X mit einer endlichen Varianz $\sigma^2 > 0$. Aus der Dichte f_X ergeben sich mit Hilfe von Transformationen die folgenden Funktionen:

- $f_1(x) = f_X(x + a_1)$
- $f_2(x) = f_X(x) + a_2$
- $f_3(x) = a_3\, f_X(x)$
- $f_4(x) = f_X(a_4\, x)$
- $f_5(x) = \begin{cases} \frac{a_5}{2\sqrt{|x|}} f_X\Big(a_5 \sqrt{|x|}\Big)\ , & x > 0 \\ \frac{a_5}{2\sqrt{|x|}} f_X\Big(-a_5 \sqrt{|x|}\Big)\ , & x < 0 \end{cases}$

a) Bestimmen Sie den Wertebereich der reellen Parameter a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5 so, dass die oben genannten Funktionen jeweils eine Dichte darstellen.

b) Nun sei die Dichte f_X differenzierbar. Durch eine weitere Transformation ergibt sich aus f_X die Funktion $f_6(x) = -x\, f'_X(x)$. Untersuchen Sie f_6 und geben Sie notwendige Eigenschaften von f_X an, so dass f_6 eine Dichte darstellt. Geben Sie eine Dichtefunktion aus der Vorlesung an, die diese Eigenschaften aufweist.

c) Durch eine weitere Transformation ergibt sich aus f_X die Dichte

$$f_Y(y) = \exp(b^2)\, f_X\Big(\frac{y - c}{\exp(-b^2)}\Big)\,.$$

Geben Sie die Transformationsvorschrift T für diese Abbildung an, so dass $Y = T(X)$ gilt.

d) Geben Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(Y)$ der transformierten Dichte aus Unterpunkt **c)** in Abhängigkeit des Erwartungswertes $\mathrm{E}(X)$ und den reellen Parametern b und c an. Wie muss der Parameter c in Abhängigkeit von $\mathrm{E}(X)$ und b gewählt werden, damit der Erwartungswert $\mathrm{E}(Y)$ verschwindet?

Aufgabe 3. Betrachten Sie den stochastischen Prozess $X(t) = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{Y}(t)$. Der vektorielle Zufallsprozess $\boldsymbol{Y}(t)$ ist für jeden Zeitschritt stochastisch unabhängig und identisch verteilt als $\boldsymbol{Y}(t) \sim \mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Die Parameter lauten

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

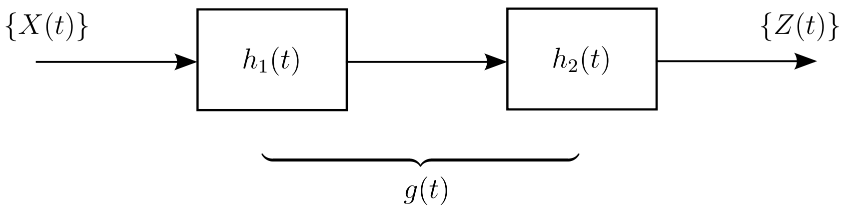
a) Geben Sie eine äquivalente eindimensionale Darstellung des stochastischen Prozesses an. Um was für einen stochastischen Prozess handelt es sich bei $X(t)$?

b) Bestimmen Sie die Erwartungswertfunktion $\mathrm{E}(X(t))$.

c) Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t_1, t_2)$.

d) Ist der stochastische Prozess $X(t)$ schwach stationär? Begründen Sie ihre Antwort.

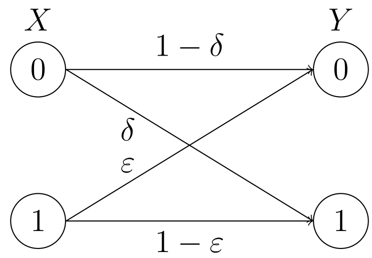
Der stochastische Prozess $X(t)$ werde von dem unten abgebildeten, verketteten LTI-System gefiltert. Die Impulsantworten lauten $h_1(t) = t\,\mathbb{I}_{[0,t_0]}(t)$ und $h_2(t) = \delta(t + t_0)$ und es gelte $t_0 > 0$.



e) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $G(f)$ der Gesamtübertragungsfunktion $g(t)$.

f) Berechnen Sie die Leistungsdichtespektren $S_{XX}(f)$ und $S_{ZZ}(f)$ des Eingangsprozesses $X(t)$ bzw. des Ausgansprozesses $Z(t)$.

Aufgabe 4. Betrachten Sie den folgenden binären Kanal:



Dabei seien $\delta, \varepsilon \in (0,1)$, und die Eingabeverteilung sei eine Gleichverteilung, d. h. es gilt $P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$. Verwenden Sie in dieser Aufgabe grundsätzlich den Logarithmus zur Basis 2.

a) Berechnen Sie die Entropie $\mathrm{H}(Y)$ und die bedingte Entropie $\mathrm{H}(Y|X)$, und geben Sie eine Formel an, mit der die Transinformation $\mathrm{I}(X;Y)$ aus diesen beiden Werten berechnet werden kann.

b) In welchem Fall entspricht die Transinformation $\mathrm{I}(X;Y)$ der Kanalkapazität? Welcher Zusammenhang zwischen Transinformation und Kanalkapazität besteht allgemein?

Nun sei $\delta = \varepsilon = \frac{1}{8}$, es liegt also ein binärer symmetrischer Kanal (BSC) vor.

c) Geben Sie die Transinformation $\mathrm{I}(X;Y)$ an.

d) Entspricht die Transinformation in diesem Fall der Kanalkapazität? Geben Sie eine kurze Begründung an.

Die Eingabeverteilung sei nun keine Gleichverteilung mehr, stattdessen gelte für den Rest der Aufgabe $P(X=0) = 0.1$ und $P(X=1) = 0.9$.

e) Geben Sie die ML-Dekodierung für den obigen BSC an.

f) Für die ME-Dekodierung ergibt sich die Dekodierregel $h_{\mathrm{ME}} : \{0,1\} \to \{0,1\}$ mit

$$h_{\mathrm{ME}}(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad h_{\mathrm{ME}}(1) = 1.$$

Welche Dekodierung wäre bei diesem Kanal zu bevorzugen? Geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antwort an.